ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - \lambda \ln x + (\lambda-2)x, \quad \lambda \in R$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$

β) Να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε η εφαπτομένη ευθεία (ε) στην C_f, να έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης για x=2.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (δ) που διέρχεται από τα σημεία που η f παρουσιάζει ακρότατα, για την τιμή του λ που βρέθηκε στο (β) ερώτημα

2ο ΘΕΜΑ

Τα στοιχεία ενός δείγματος έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	Κεντρική τιμή xi	Συχνότητα νi	Αθροιστική συχνότητα Ni	Σχετική συχνότητα fi	Σχετική αθροιστ. συχνότητα Fi
[,)			8		
[,)	6	10			0,09
[,)					
[,)	14				

Να συμπληρωθεί ο πίνακας, αν γνωρίζουμε ότι η αθροιστική συχνότητα της 3ης κλάσης ισούται με την συχνότητα της 4ης κλάσης.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) $f(x) = x^2 - \lambda \ln x + (\lambda-2)x, \quad x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) = 2x - \frac{\lambda}{x} + (\lambda-2) = \frac{2x^2 + (\lambda-2)\cdot x - \lambda}{x}$$

$2x^2 + (\lambda - 2)\cdot x - \lambda = 0$

$\Delta = (\lambda-2)^2 + 8\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 8\lambda = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(\lambda-2) \pm (\lambda+2)}{4} = \begin{cases} \dfrac{-\lambda+2+\lambda+2}{4} = 1 \\ \dfrac{-\lambda+2-\lambda-2}{4} = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

i) Για $-\frac{\lambda}{2} < 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$

x	0		1		$+\infty$
f΄(x)		-	0	+	
f΄		$\searrow$		$\nearrow$	

ii) Για $-\frac{\lambda}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

x	0		1	
f΄(x)		-	0	+
f΄		$\searrow$	0	$\nearrow$

iii) Για $1 > -\frac{\lambda}{2} > 0 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 0$

x	0		$-\frac{\lambda}{2}$		1		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

iv) Για $-\frac{\lambda}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = -2$

x	0		1	
f΄(x)		+	0	+
f΄		$\nearrow$		$\nearrow$

v) Για $-\frac{\lambda}{2} > 1 \Leftrightarrow \lambda < -2$

x	0		1		$-\frac{\lambda}{2}$	
f΄(x)		+	0	-	0	+
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

β) $f'(x) = \frac{2x^2 + (\lambda-2)\cdot x - \lambda}{x}$: συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο (x, f(x)).

$$f''(x) = \frac{[4x + (\lambda-2)]\cdot x - (2x^2 + (\lambda-2)\, x - \lambda)}{x^2} =$$

$$= \frac{4x^2 + (\lambda-2)x - 2x^2 - (\lambda-2)\, x + \lambda}{x^2} = \frac{2x^2 + \lambda}{x^2}$$

$f''(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 4 + \lambda}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -8$ άρα $f''(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$

x	0		2	
f΄΄(x)		-	0	+
f΄(x)		$\searrow$		$\nearrow$

Πράγματι για x=2 η f'(x) παίρνει την ελάχιστη τιμή της,

$$f'(2) = \frac{8 - 20 + 8}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

γ) Για λ=-8 <-2 η f παρουσιάζει ακρότατα για x=1 το f(1)= 1+8 . 0 -10 =-9 A(1, -9) και για $x = -\frac{-8}{2} = 4$ το

f(4)=16+ 8ln4 - 40=- 24+8ln4 B (4, - 24 +8ln4)

Έστω y=αx+β η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα A(1, -9) και B(4, -24+8ln4) τότε

$$\begin{cases} -9 = \alpha \cdot 1 + \beta \\ -24 + 8\ln 4 = \alpha \cdot 4 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{-12 - 8\ln 4}{3} \\ \alpha = \dfrac{-15 + 8\ln 4}{3} \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι:

$$y = \frac{-15 + 8\ln 4}{3} \cdot x - \frac{12 + 8\ln 4}{3}$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Κλάσεις	Κεντρική τιμή xi	Συχνότητα νi	Αθροιστική συχνότητα Ni	Σχετική συχνότητα fi	Σχετική αθροιστ. συχνότητα Fi
[,)		**8**	8	**0,04**	**0,04**
[,)	6	10	**18**	**0,05**	0,09
[,)		**82**	**100**	**0,41**	**0,50**
[,)	14	**100**	**200**	**0,50**	**1**
Σύνολο		**200**		**1**	

α) $v_1 = N_1 = 8$

β) $N_2 = N_1 + v_2 = 8 + 10 = 18$

γ) $F_2 = \frac{N_2}{N} \Leftrightarrow N = \frac{N_2}{F_2} = \frac{18}{0,09} = 200$

δ) $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 200 \Leftrightarrow v_3 + v_4 = 200 - 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_3 + v_4 = 182$ ακόμη ισχύει ότι $N_3 = v_4$ άρα

$v_1 + v_2 + v_3 = v_4 \Leftrightarrow 8 + 10 + v_3 = v_4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 + 182 - v_4 = v_4 \Leftrightarrow 200 = 2v_4 \Leftrightarrow v_4 = 100$

ε) $v_1 + v_2 + v_3 = N_3$ άρα $v_3 = 100 - 18 \Leftrightarrow v_3 = 82$

ζ) $F_1 = f_1 = \frac{8}{200} = 0,04$

η) $f_2 = \frac{10}{200} = 0,05 \quad f_3 = \frac{82}{200} = 0,41 \quad f_4 = \frac{100}{200} = 0,5$

θ) Έστω x το αριστερό άκρο της 1ης κλάσης και c το πλάτος της κλάσης, τότε οι δύο πρώτες στήλες του πίνακα παίρνουν τη μορφή

Κλάσεις	Κεντρική τιμή xi
[x , x+c)	
[x+c , x+2c)	6
[x+2c, x+3c)	
[x+3c , x+4c)	14

$$\frac{x + c + x + 2c}{2} = 6 \Leftrightarrow 2x + 3c = 12 \quad (1)$$

$$\frac{x + 3c + x + 4c}{2} = 14 \Leftrightarrow 2x + 7c = 28 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι c=4 και x=0, οπότε

$$x_1 = 6 - 4 = 2$$
$$x_3 = 6 + 4 = 10$$

Η πρώτη κλάση είναι [0, 4) η δεύτερη [4, 8), η τρίτη [8, 12) και η τέταρτη [12, 16).

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ